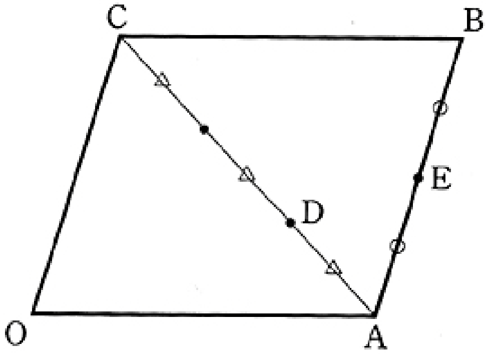
ウォーム・アップ　　　　　　　　２年　　組　　番　氏名

平行四辺形 OABC の対角線 AC の１：２に**内分する点**を D, 辺 AB の中点を E とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ としたとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を **２つのベクトル**$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せると思いますか。

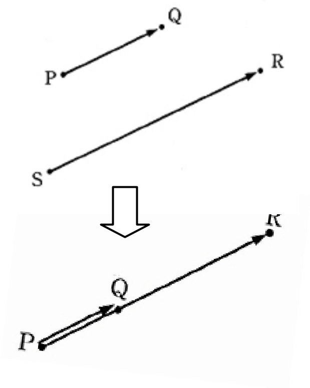
(2)　3 点 O, D, E は**一直線上**にある！　このことを証明するにはどうしたらいいですか。

証明できる自信度は □

5　かなり
4　まあ
3　半分くらい
2　少し
1　ぜんぜんない

A

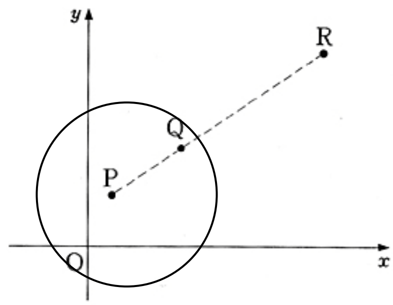
２年　　組　　番　氏名



２つの線分 PQ と SR の間に，ある実数 k について $\overrightarrow{SR}=k\overrightarrow{PQ}$ という関係があれば，　$\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR}$、つまり２つのベクトルは平行である。
ここで、２つのベクトルの始点 P と S が一致した時を考えると、

> ３点 P**,** Q**,** R が**一直線上**にあるかどうかは、ベクトルを用いると，
> $\overrightarrow{PR}$ が $\overrightarrow{PQ}$ の実数倍として　$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$　と書けるかどうか

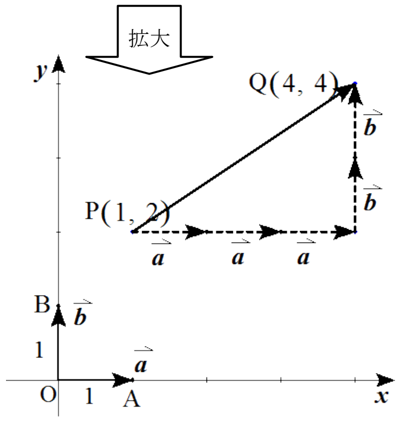
で判断できることがわかる。



例１　平面上に，３点 P(1，2)，Q(4，4)，R (10，8)をとると，一直線上に並んでいるように見える．果して，正しく一直線上に並んでいるかどうかをベクトルで調べよ。

x 軸，y 軸がある座標平面では，ベクトルの始点を「原点」に決めておくと便利である。

いま，A(1，0)，B(0，1)をとり，大きさ１のベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をこの**２つのベクトル**で表せる。



右図のように直角三角形を考えると　$\overrightarrow{PQ}=3\vec{a}+2\vec{b}$

同様に，　$\overrightarrow{PR}=9\vec{a}+6\vec{b}$

ここで，　$\overrightarrow{PR}=9\vec{a}+6\vec{b}=3\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)=3\overrightarrow{PQ}$

よって，　$\overrightarrow{PR}=3\overrightarrow{PQ}$　　が言えたので，線分 PQ を３倍に引きのばした先に点 R があることになり，３点が**一直線上**にあるとわかる。

例２　$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\overrightarrow{PR}=\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ の場合，３点 P，Q，R は**一直線上**にあるか。

２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の係数が分数のときは，分数でくくると分かりやすい。

$\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{4}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$ より、$4\overrightarrow{PQ}=\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$，同様に、$\overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$ より、$3\overrightarrow{PR}=\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)$

この２式から、$3\overrightarrow{PR}=4\overrightarrow{PQ}$　つまり，$\overrightarrow{PR}=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\overrightarrow{PQ}$ が成り立つ。

> ←　$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$ の
> k　が分数

よって，３点 P，Q，R は**一直線上**にある。

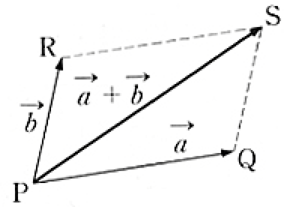
まとめ

> ３点 P，Q，R について，
> ・$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を**２つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$** で表すことができて，
> ・$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$　となる実数 k があれば，３点は**一直線上**にある。

B

２年　　組　　番　氏名

２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ の和$\vec{a}+\vec{b}$ は、始点をそろえた時、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ でつくる平行四辺形の対角線になった。このとき、



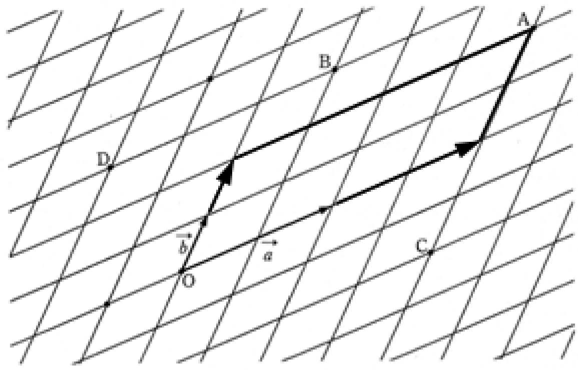
２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられると，

> どんなベクトル $\vec{p}$ も$\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って
>
> $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （実数 s，t）の形で，ただ１通りに表される。

このことを、次の例で確認しよう。

例１　図のように$\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って表そう。

$\overrightarrow{OA}$を対角線とする平行四辺形から　$\overrightarrow{OA}=2\vec{a}+2\vec{b}$

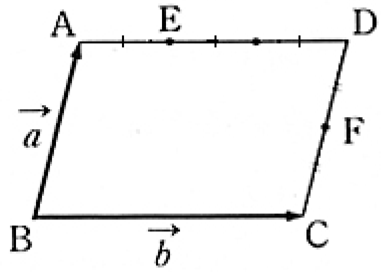


同様に、$\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+3\vec{b}$

また、$\overrightarrow{OC}$を対角線とする平行四辺形を考えると、$\vec{b}$ の逆ベクトル$-\vec{b}$ を使って、$\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+2(-\vec{b})=2\vec{a}-2\vec{b}$

同様に、$\vec{a}$ の逆ベクトルを使って、$\overrightarrow{OD}=-\vec{a}+3\vec{b}$

例２　図のような平行四辺形 ABCD において，辺 AD を１：２に内分する点を E，辺 CD の中点を F とする。



いま，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを**２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$** を用いて表せ。

$\overrightarrow{BE}$ を対角線にもつ平行四辺形を考えて，$\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\dfrac{\square}{\square}\vec{b}$

$\overrightarrow{BF}$ を対角線にもつ平行四辺形を考えて，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{\square}{\square}\vec{a}+\vec{b}$

まとめ

> 平行四辺形の対角線を考えることで、
>
> どんなベクトルも，**２つのベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$** を用いて、$\bigcirc\vec{a}+\square\vec{b}$ の形に表せる。

C

２年　　組　　番　氏名

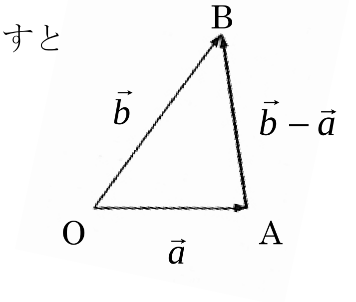
図形の辺や線分もベクトルで表すことができる。ベクトルの差を思い出すと

△OAB において $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ のとき，辺 AB について

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\vec{b}-\vec{a}$$

$\overrightarrow{\triangle\square}=\overrightarrow{O\square}-\overrightarrow{O\triangle}$

前→後　　　後　―　前



これを用いると

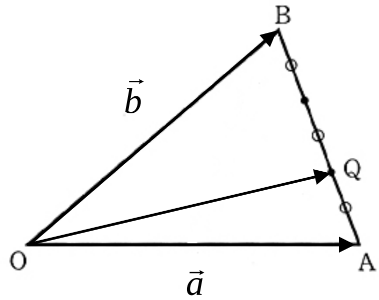
図形の頂点の１つを始点と決めると，

内分点を終点にもつベクトルも，**２つのベクトル** $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せる。

このことを次の例で確かめよう。

例　△OAB において辺 AB を 1：2 に**内分する点**を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，

ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を**２つのベクトル** $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。



〈ステップ１〉

まず線分 AB だけに着目すると，点 Q は辺 AB を
1：2 に内分するから、　AQ：AB＝1：3

よって，　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$　…①

〈ステップ２〉

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ としているから，始点が点 O のベクトルの差を用いて

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\quad,\quad\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$$

①に代入して，　$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$

これを変形して，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$　だから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\square}{\square}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

まとめ

図形において，線分の**内分点**を終点とするベクトルも、

始点をそろえたベクトルの差を使えば，**２つベクトル** $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せる。

ジグソー

自分以外の２人の説明を聞いて、ポイントをメモしよう。

□の説明

□の説明

ジグソー

２年　　組　　番　氏名

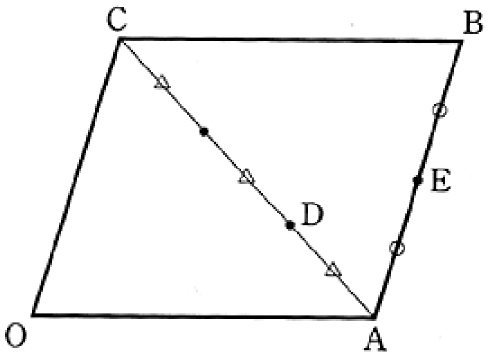
あらためて３人（４人）で力を合わせ，再度次の問題に答えてみよう．

現時点で、証明できる自信度は

5　かなり
4　まあ
3　半分くらい
2　少し
1　ぜんぜんない

1 平行四辺形 OABC の対角線 AC の１：２に**内分する点**を D，辺 AB の中点を E とする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ としたとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OE}$ を **２つのベクトル** $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　3 点 O，D，E は**一直線上**にあることを示せ。

2 ベクトルは「便利だ！」と思いましたか？　→　はい ・ いいえ

「はい」と答えた人は、ベクトルのどこが便利ですか